مبرهنة:

تكون نصف الزمرة الدورية المنتهية S زمرة إذا وفقط إذا ملكت عنصراً جامداً وحيداً

البرهان:

بفرض أن e هو العنصر الجامد الوحيد في نصف الزمرة الدورية المنتهية S فإن $\forall a\in S$ فإن $\langle a\rangle$ منتهية وبالتالي لها دور m والدليل r

لنفرض جدلاً أن $r>1$ فإن

$$a^{r+m}=a^{r} \Rightarrow a\cdot a^{r+m-1}=a\cdot a^{r-1} \Rightarrow a^{r+m-1}=a^{r-1}$$

وهذا مخالف لتعريف الدليل والمذكور بالفرض الجدلي خاطئ أي أن $r=1$ وبالتالي فإن $\langle a\rangle=K_a$ وبما أن K_a زمرة جزئية فإن $\langle a\rangle$ تكون زمرة وبما أن الجامد الوحيد هو e فإن e محايد في $\langle a\rangle$ ويكون عندئذ

$$\forall a\in S \quad ea=a.e=a$$

أي أن e محايد في S

بما أن $\langle a\rangle$ زمرة فإنه يكون للعنصر نظير في $\langle a\rangle$ وبالتالي فإنه يكون $\forall a\in S$ فإنه يكون له a نظير في S أي أن S زمرة

العكس:

إذا كانت S زمرة فإن محايدها هو العنصر الجامد الوحيد لأنه إذا فرضنا أن لدينا عنصراً جامداً آخر مثل a فإنه يكون $a^2=a \Rightarrow a\cdot a=a\cdot e \Rightarrow \cancel{a}\cdot a=\cancel{a}\cdot e \Rightarrow a=e$

أي أن e هو العنصر الجامد الوحيد

تمرين:

أثبت صحة ما يلي:

1) من أجل أي عنصر من نصف زمرة دورية S توجد قوة لـ a مثل a^n بحيث يكون a^n عنصراً جامداً في S أي أن

$$\forall a\in S \ \exists n\in N;\ a^n\cdot a^n=a^n$$

2) إن أي نصف زمرة دورية تحوي زمرة جزئية عظمى

الحل:

S نصف زمرة دورية $\Leftarrow$ $\forall a\in S$ فإن $\langle a\rangle$ منتهية $\Leftarrow$ يوجد الدليل r ودور m

لتكن S نصف الزمرة وبالتالي تكون $K_a=\{a^r, \ldots, a^{r+m-1}\}$ زمرة جزئية من S

$\Rightarrow K_a$ تمتلك عنصر حيادي وهو جامد مثل a^n حيث أن n يمكن أن نأخذ أحد القيم $r, r+1, \ldots, r+m-1$ وهذا يعني أن

$$e = e^2 = a^n a^n = a^n$$

(2) S نصف زمرة دورية $\Leftarrow$ حسب (1) تمتلك عنصر جامد $e=a^n$ وحسب المرحلة السابقة فإن He زمرة جزئية عظمى من S

تمرين:

أثبت أن نصف الزمرة S هي نصف زمرة صفرية يمينية إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين التاليين:

1) كل تحويل لـ S هو انسحاب يميني

2) الانسحاب اليساري الوحيد هو التطبيق المطابق

الحل:

نفرض أن S هي نصف زمرة صفرية يمينية أي أنه $x,y \in S$ فإن $xy = y$ ولتكن $f: S \to S$ هو تحويل لـ S

$$f(xy) = f(y)$$
$$xf(y) = f(y) \Rightarrow f(xy) = xf(y) \quad \forall x,y \in S$$

وبالتالي فإن f هو انسحاب يميني

لنبرهن أن التطبيق المطابق $I: S \to S$ حيث $I(x) = x$ هو انسحاب يساري

$$I(xy) = xy = I(x)y$$

أي أن I انسحاب يساري

إذا كان f هو انسحاب يساري آخر لنصف الزمرة S فإن $y = xy$ (صفرية)

$$f(y) = f(xy) \overset{\text{يساري}}{=} f(x) \cdot y \overset{\text{صفرية}}{=} y \quad \forall y \in S$$

أي أن التطبيق f مطابق وبالتالي فإن التطبيق المطابق هو انسحاب اليساري الوحيد

العكس:

(1) نفرض أن كل تحويل لـ S هو انسحاب يميني. لنأخذ التحويل الثابت لـ S

$S \to S : f$; $f(x) = a$; $\forall x \in S$ ونفرض أن $x, y \in S$ فإن

$$a = f(xy) = xf(y) = xa$$

إذا جعلنا a في جميع عناصر المستقر فإنه يكون

$$\forall x, a \in S \; ; \; xa = a$$

ومنه ينتج S صفرية يمينية

② نفرض أن الانسحاب اليساري الوحيد لـ S هو التطبيق المطابق أي:

$\lambda_a : S \to S$ حيث $\lambda_a(x) = ax$ هو انسحاب داخلي يساري لـ S (حيث $a \in S$)

$$\lambda_a(xy) = axy = (ax)y = \lambda_a(x)y$$

أي أن λ_a هو انسحاب يساري وبالاعتماد على الفرض يجب أن يكون λ_a مساوية للتطبيق المطابق

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_a(x) = ax & \text{حسب تعريف } \lambda_a \\ \lambda_a(x) = x & \text{حسب الفرض} \end{array}\right\} \Rightarrow ax = x \quad \forall x \in S$$

إذا جعلنا a في S يكون من أجل أي عنصرين x, a فإن $ax = x$ وبالتالي S صفرية يسارية

الزمر النصف طبولوجية:

في هذا الفصل سوف ندرس الزمر النصف طبولوجية والتي هي أعم من الزمر الطبولوجية أي أن كل زمرة طبولوجية هي زمرة نصف طبولوجية ولكن العكس ليس صحيحاً في الحالة العامة وهذا ما سنثبته في مثال ثم سوف ندرس الشروط اللازمة كي تكون الزمرة النصف طبولوجية زمرة طبولوجية

تعريف:

نسمي الفضاء الطبولوجي G والذي تكون فيه G زمرة أيضاً بـ زمرة نصف طبولوجية إذا كان التطبيق $g : G \times G \to G$ حيث $g(x,y) = xy$ مستمراً من أجل كل قيم (x,y)

تعريف:

إذا كان G فضاء طبولوجي وكانت G زمرة بنفس الوقت فإننا ندعو G زمرة طبولوجية

إذا كان التطبيق g المعرف سابقاً متقابلاً بالإضافة إلى ذلك إذا كان التطبيق $g_2 : G \longrightarrow G$

حيث $g_2(x) = x^{-1}$ متقابل على G

ملاحظة:

إذا كانت الزمرة جمعية نستعيض عن xy بـ $x+y$ وعن x^{-1} بـ $-x$ ونرمز للعنصر الحيادي في الزمرة الضربية بـ e والعنصر الحيادي في الزمرة الجمعية بـ 0